Ángel Tamariz M.

Una intuición que no es extraña al espíritu humano es la sensación de que formamos parte de una realidad que va más allá de lo que pueden observar nuestros sentidos. Cuando tenemos la suerte de gozar las imágenes mágicas de estrellas o galaxias, que en la actualidad los grandes telescopios son capaces de transmitirnos, o cuando tenemos la oportunidad de disfrutar las imágenes de lo muy pequeño, como el tejido celular de *Volvox aureus* o de las primeras células de la formación de un ser humano en el útero materno, y estamos conscientes de que lo pequeño, las

Los infinitos

el paraíso de Cantor

¡El infinito!
Ningún otro problema
ha conmovido tan profundamente
el espíritu del hombre.

David Hilbert

células, está formado por partes más elementales y diminutas como los organelos, que lo están por proteínas y ácidos nucleicos, y éstos a su vez se constituyen por partículas aún más pequeñas (moléculas, átomos), entonces se nos presenta con fuerza la visión de nuestro universo inmenso, e inmerso —¿por qué no?— en otros universos conteniendo realidades inimaginables. Estas sensaciones ya las expresaban Kant y Shakespeare en formas diversas: "La fábrica del mundo nos produce un silencioso asombro por su inmensa grandeza y por la variedad y la belleza infinitas que por todas partes resplandecen en ella”, dice el primero en su *Historia general de la naturaleza y teoría del cielo*, mientras que en *Hamlet* se puede leer: “Oh Dios, podría estar inmerso en una cáscara de nuez y sentirme rey del espacio infinito”.

Podríamos intentar dar una primera definición de infinito diciendo que es la palabra con la cual designamos la sensación del espíritu, el cual percibe que la realidad limitada por nuestros sentidos no es toda la realidad. Así, el infinito sería el producto de una experiencia sublime, ya sea estética, científica, mística, poética o amorosa, como lo escribió Pablo Neruda: “Beso a beso recorro tu pequeño infinito” —definición emocional y mística que depende de las sensaciones de cada uno de nosotros.

La experiencia de lo infinito aparece definitiva e insistentemente, conservando sus características del infinito emocional que definimos antes, cuando nos acercamos a la geometría y a los números, cuando hacemos matemáticas.

Recordemos, por ejemplo, el problema de los segmentos de recta que no pueden ser comparables usando una unidad común (figura 1); éste es el problema de los números irracionales. ¿Qué significa una magnitud que necesita, para ser definida, una sucesión infinita de aproximaciones por medio de números conocidos? Esto ya lo habían observado los pitagóricos cuando descubrieron la raíz cuadrada de *2*, es el caso también de π; un número cercano a él es 3.1415926535 89793238462643383279502884197169 (en la actualidad, con el uso de las computadoras, se han podido obtener aproximaciones a π cuya representación decimal se expresa con hasta más de cincuenta mil dígitos).

O recordemos también las famosas paradojas de Zenón de Elea, quien, en el siglo V a. C., planteaba, de manera contundente, las dificultades que los procesos infinitos crean entre la realidad lógica y la realidad física. Aquiles, el héroe griego, y una tortuga deciden medir sus habilidades e inician una carrera. Aquiles le da ventaja a la tortuga permitiéndole que inicie la carrera en una posición más adelantada. Resulta entonces que, bajo estas condiciones, éste jamás podrá alcanzar a la tortuga, pues cuando llegue al lugar en donde la tortuga comenzó la carrera, ésta estará adelante de él, y cuando alcance este segundo punto, que ya tocó la tortuga, ésta estará en algún lugar adelante, etcétera (figura 2). Por tanto, Zenón concluye que el movimiento no existe.

Es también en el siglo XIX cuando Peano define a todos los números naturales mediante una colección finita de axiomas, que permite decidir muchas propiedades matemáticas por medio de la llamada inducción matemática. Por fin, a finales del siglo XIX, es el matemático alemán Georg Cantor quien resuelve de manera magistral el problema de lo infinitamente grande. Reflexionaremos primero sobre los conjuntos, los números y lo que significa contar y comparar números. Recordemos que $a \leq b$ significa que a es menor o igual que b; $a < b$ significa “a es estrictamente menor que b”; $a \in A$ quiere decir que el objeto a es un elemento del conjunto A; $a \notin A$ debe leerse “a no pertenece a A”, y $a \neq b$ como “a es diferente de b”; los símbolos $\{a,b,c,d\}$ y $\{a \in A : a$ satisface $\wp\}$ se usan para denotar al conjunto que contiene solamente los objetos a, b, c y d, y al conjunto de elementos del conjunto A que satisface la propiedad $\wp$, respectivamente.

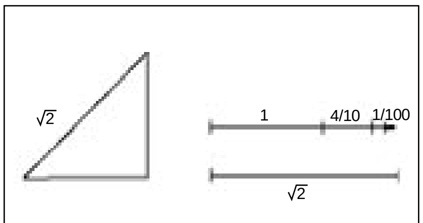


Figura 1

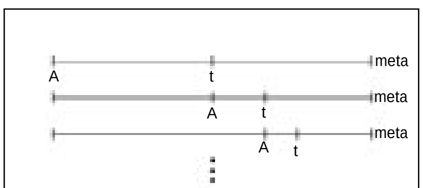


Figura 2

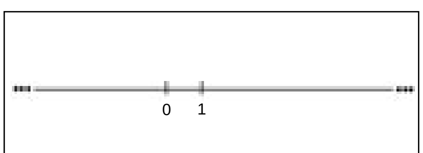


Figura 3

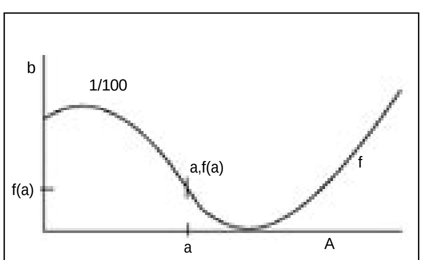


Figura 4

Números y conjuntos

En matemáticas se trabaja con símbolos, con números, con objetos geométricos, como los triángulos o las rectas, o los puntos de un plano. También, y principalmente, se trabaja con conjuntos formados por objetos matemáticos como: 1) el conjunto de los primeros 5 números naturales: $\{1,2,3,4,5\}$; 2) la colección de los números que dividen al número 12: $\{1,2,3,4,6,12\}$; 3) la colección de circunferencias que pasan por dos puntos diferentes a y b en el plano; 4) el conjunto de los números naturales $N = \{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$; 5) el conjunto de los puntos en una recta (figura 3). Precisamente a los puntos de esta recta les llamamos los números reales, y denotamos a este conjunto con el símbolo R, y 6) el conjunto $\{x^n : n \in N\}$, que es una colección de curvas en el plano.

Si A y B son dos conjuntos, entonces $A \times B$ es el conjunto formado por todos los objetos de la forma (a,b) en donde $a \in A$ y $b \in B$. Además, una subcolección B de los elementos de un conjunto A, es también un conjunto. En este caso, decimos que B es un subconjunto de A.

Un conjunto de particular importancia y que seguramente llamará la atención del lector, es aquel que carece de elementos, al cual llamamos el conjunto vacío y lo denotamos con $\varnothing$. La consideración de este concepto no es un acto de excentricidad, así como no lo es la inclusión del cero en el sistema numérico.

Otros ejemplos de conjuntos son las funciones: Una función f definida en un conjunto A y con valores en un conjunto B es un conjunto $\{(a,f(a)) : a \in A\}$ contenido en $A \times B$ de tal forma que a cada $a \in A$ le asociamos un solo elemento $f(a)$ en B (figura 4).

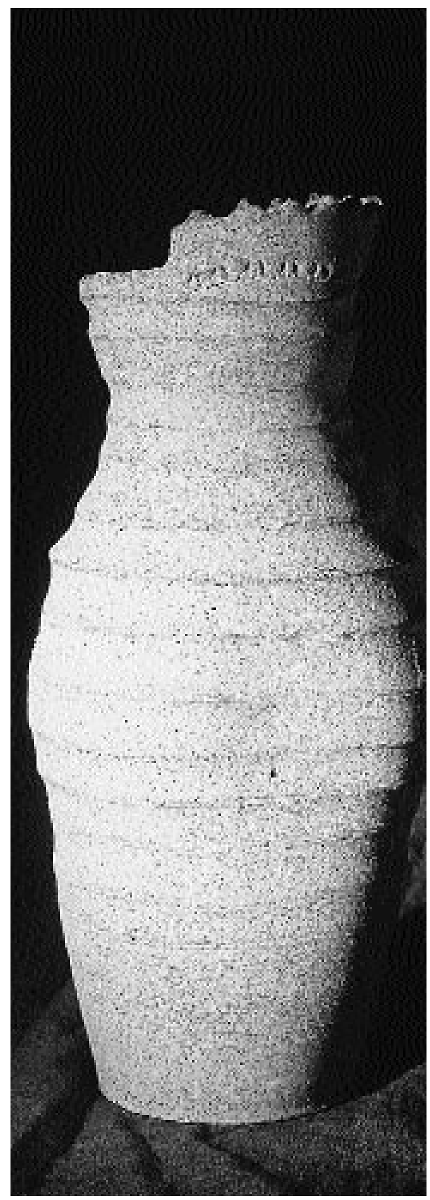
A partir de los ejemplos aquí planteados, podemos dar una primera clasificación de los conjuntos. Algunos tienen la peculiaridad de que sus elementos pueden ser escritos o representados gráficamente de manera exhaustiva. Este es el caso de $\{1,2,3,4,5\}$ o es el caso del conjunto de rectas que pasan por cuatro puntos fijos en el plano. En cambio, si tratamos de escribir todos los números naturales uno después de otro, nos convenceremos rápidamente de que esto es imposible. Es decir, nuestros sentidos no pueden percibir, usando el tiempo y el espacio en donde vivimos, a todos y cada uno de estos números.

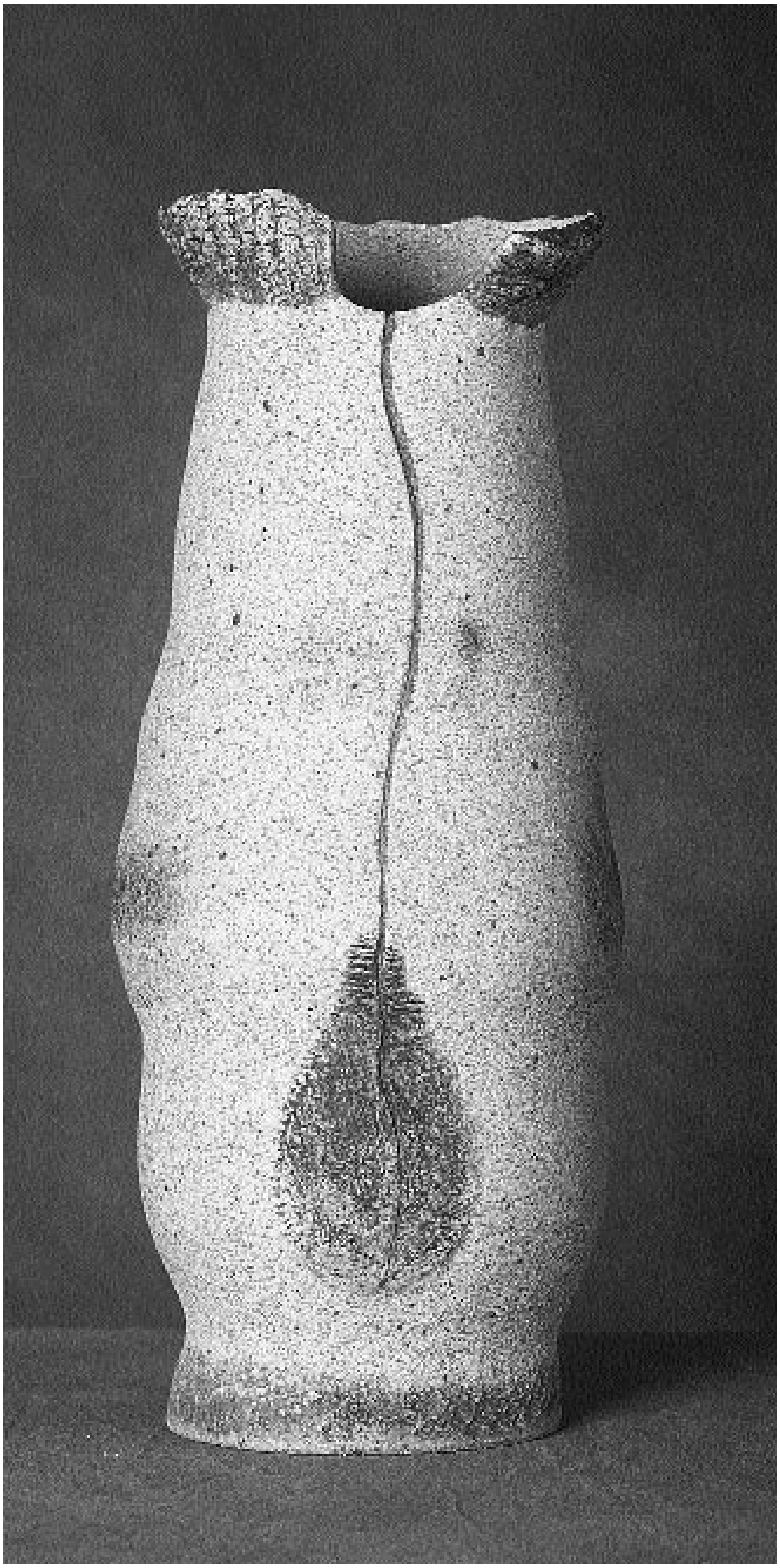
Esta idea se aproxima a la definición intuitiva y emocional de infinito que dimos antes. Así podríamos hacer un segundo intento por definir infinito de una manera más formal: "Un conjunto A es finito si podemos representar gráficamente a cada uno de sus elementos en un momento y lugar determinado. Si esto no es posible, diremos que A es infinito."

Observemos, sin embargo, que si bien no podemos escribir a todos los elementos de N de una sola vez, sí podemos definir a todos estos elementos usando una colección finita de palabras : 1 es un número natural, si k es un número natural, entonces $k+1$ es un número natural.

Contar

Cuando tenemos frente a nosotros una colección finita de objetos (digamos, una bolsa de monedas) y queremos contar cuántos objetos son, reproducimos básicamente la siguiente operación: seleccionamos (con las





manos, con la vista o con algún instrumento) primeramente uno de los elementos por contar y mencionamos la palabra “uno”, luego tomamos un elemento diferente al anterior y decimos “dos”, y así proseguimos hasta acabar con todos los elementos de la colección. Gráficamente podemos representar esta operación como se muestra en la figura 5.

Así, la acción de contar los elementos de un conjunto finito A que contiene k objetos, es básicamente la de establecer una correspondencia exhaustiva y uno-a-uno entre los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto $\{1,2,...,k\}$.

Una vez que estamos conscientes de lo que significa contar, podemos preguntarnos qué es el número *3*. Lo primero que se nos ocurre para contestar esta pregunta es tratar de dar ejemplos. Tomamos tres manzanas y decimos “tres manzanas”, tomamos tres sillas y decimos “tres sillas”. Decimos, “el conjunto $\{1,2,3\}$ tiene tres elementos”, o “el triángulo tiene tres lados”. Pero el ser tres no depende de las manzanas o de las sillas o de los lados del triángulo. ¿Cómo resolver pues esta pregunta? Una buena alternativa es la siguiente: el número 3 es la clase de todos los conjuntos que tienen tres elementos (figura 6).

Esto tiene sentido, y lo podemos hacer con cada número natural. Incluso, esta definición nos permite también comparar entre dos números dados, digamos 3 y 5. ¿Cuál es el mayor de ellos? Tomamos un representante del primero, digamos $\{1,2,3\}$, y uno del segundo: $\{1,2,3,4,5\}$. Es claro que podemos establecer una relación exhaustiva y uno-a-uno entre el primero y un subconjunto del segundo, pero es imposible hacer lo mismo en sentido inverso. Entonces decimos que *3* es estrictamente menor que *5*.

Georg Cantor y el infinito

Son estas ideas básicas, planteadas en la sección anterior, las que inspiraron a Cantor a finales del siglo XIX a resolver el problema de lo infinitamente grande. Su magistral invención fue el concepto fundamental de función biyectiva, es decir, la idea de una relación exhaustiva y uno-a-uno. Con más exactitud: Una función *f* definida sobre un conjunto *A* y con valores en un conjunto *B* es biyectiva si (1) *f* relaciona cada dos elementos diferentes de *A* con dos valores diferentes de *B*, y (2) cada elemento en *B* está relacionado con uno de *A* (figura 7). Si es posible establecer una relación biyectiva entre los conjuntos *A* y *B*, entonces decimos que *A* y *B* son equivalentes o tienen la misma cantidad de elementos.

Es así, con la idea de función biyectiva, como podemos definir de manera más precisa lo que significa que un conjunto sea finito o infinito: A es finito si es vacío o si existe un número natural *k* y una función biyectiva entre los elementos de *A* y los primeros *k* números naturales (figura 8). Y un conjunto es infinito si no existe una función con estas características.

Estas ideas nos conducen a generalizar el concepto de número: un número es la clase de todos los conjuntos que son equivalentes (es decir, que tienen la misma cantidad de elementos). Así, como dijimos antes, a la clase de todos los conjuntos con tres elementos le llamamos número 3. De esta manera podemos también considerar la clase de los conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos que los números naturales. El número que designa a esta clase es el número infinito álef-cero, el cual se escribe como $\aleph_0$. (álef o aleph, $\aleph$, es la primera letra del alfabeto hebreo y corresponde a la letra A.)

Con la idea de función biyectiva podemos entonces hablar de conjuntos finitos y de conjuntos infinitos con toda precisión y de números mayores que otros; es decir, podemos determinar cuándo un conjunto tiene más elementos que otro. En efecto, si podemos establecer una función biyectiva entre un conjunto *A* y un subconjunto de un conjunto *B*, y no podemos hacer lo mismo de *B* en *A*, entonces decimos que *B* tiene una cantidad de elementos estrictamente mayor que la cantidad de elementos que contiene *A* (figura 9).

Entre los ejemplos de conjuntos que hemos presentado nos queda claro que varios de ellos son conjuntos infinitos. Por ejemplo, los números naturales y los números reales; así también es infinito el conjunto de los números primos, el de los números enteros $Z = \{....-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$, y también el conjunto de los números algebraicos: un número es algebraico si satisface una ecuación del tipo $a_nx^n + a_{n+1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ en donde a_i es un número entero para toda $i \in \{0,...,n\}$. ¿Será cierto que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos? Por ejemplo, ¿*N* tiene la misma cantidad de elementos que *R*? y ¿tendrá *R* la misma cantidad de elementos que la colección de puntos del plano? Este tipo de preguntas se las planteó Cantor y logró responderlas de manera sorprendente. En primer lugar resulta que *N* tiene tantos elementos como algunos de sus subconjuntos propios; este es el caso, por ejemplo,

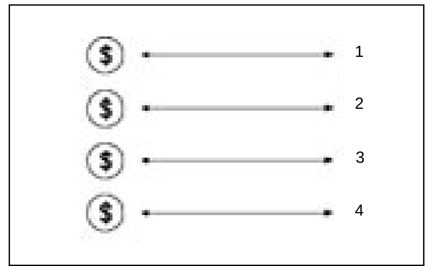


Figura 5

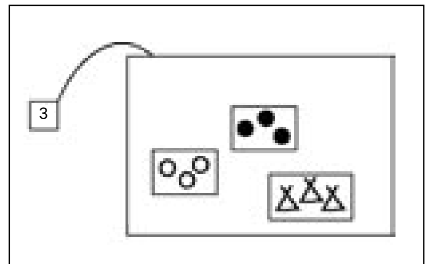


Figura 6

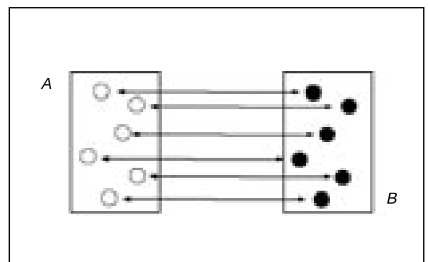


Figura 7

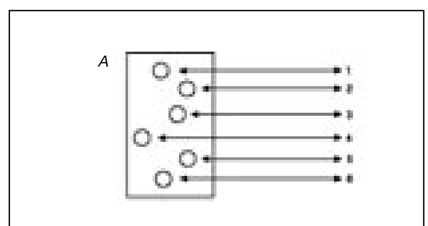


Figura 8

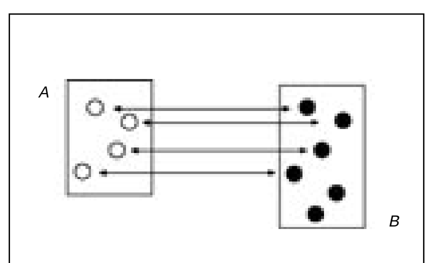


Figura 9

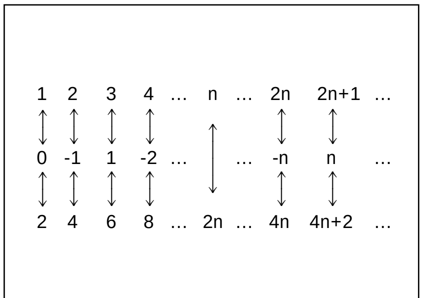


Figura 10

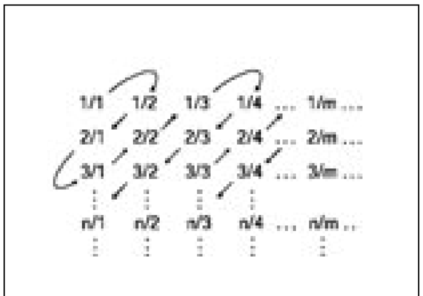


Figura 11

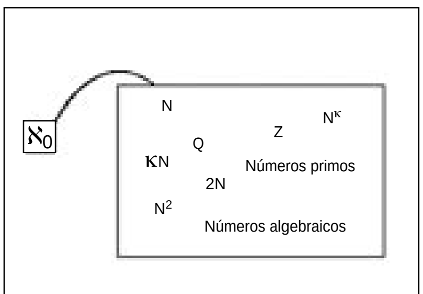


Figura 12

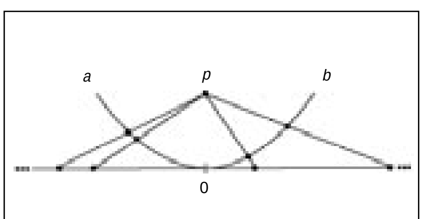


Figura 13

del conjunto de los números pares. También el conjunto de los números enteros Z tiene la misma cantidad de elementos que N (figura 10). Y aún más asombroso es que hay tantos números algebraicos como naturales.

Ahora podemos imaginar que los números impares son tantos como los elementos en N.

¿Cómo demostraríamos que la colección de números primos es tan grande como N?

También es posible darnos cuenta de que hay tantos números naturales como racionales positivos (figura 11), es decir, tantos números racionales (elementos en $Q = \{p/q: p,q \in Z, q \neq 0\}$) como naturales. Así, en el costal con etiqueta $\aleph_0$ se encuentran Z, $\{2n : n \in \mathrm{N}\}$ y Q (figura 12).

Asimismo, usando la idea de función biyectiva, podemos demostrar que la cantidad de puntos en un segmento de recta $[a,b]$ es la misma que la de puntos en un segmento $[c,d]$ para cualesquiera $a,b,c,d \in R$ que cumplen $a < b$ y $c < d$; y que la cantidad de puntos en el segmento de recta comprendido entre dos puntos a, b con $a < b$, $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$, es la misma que la de puntos en toda la recta real (figura 13).

Comparar conjuntos

Una de las preguntas que formulamos antes y que resulta importante es ¿todos los conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos? En particular, ¿coincide la cantidad que hay de números reales con la de números naturales?

Una vez más, ¿qué significa que un conjunto A tenga más elementos que un conjunto B? Bueno, como ya dijimos antes, A tiene estrictamente más elementos que el conjunto B si: 1) podemos establecer una biyección entre los elementos de B y los elementos de un subconjunto de A, pero, 2) no podemos establecer una biyección entre los elementos de A y los elementos de un subconjunto de B (este es el llamado teorema de Cantor-Bernstein).

Es necesaria la segunda condición 2) en la definición anterior, ya que, por ejemplo, N tiene tantos elementos como el conjunto de racionales positivos $\{p/q : p,q \in N\}$. Esto nos podría hacer pensar que la colección de números racionales, es decir, el conjunto de todos los cocientes (o quebrados) formados por números enteros, es un conjunto con una cantidad de elementos estrictamente mayor que los que posee N, pero esto no es cierto, hay tantos naturales como racionales.

Algunos otros ejemplos: se puede probar que la colección de puntos en un círculo es tan grande como la colección de puntos en todo el plano. Es más, hay tantos puntos en el pequeño guión – como puntos hay en todo nuestro universo de tres (¿o cuatro?) dimensiones. Se derrumba definitivamente el principio euclideano que afirmaba "el todo es estrictamente mayor que cada una de sus partes". Es claro que esto ya no es siempre cierto, por lo menos, como estamos viendo aquí, hay partes que tienen tantos elementos como el todo. El aforismo euclideano debe cambiarse por el siguiente: "el todo es mayor o igual que cada una de sus partes". Esta realidad matemática la expresa Kant diciendo: "No nos acercamos más a la infinitud de la obra de la creación divina encerrando el radio de su revelación en una esfera que tenga por radio la Vía Láctea, que tratando de circunscribirla a una bola de una pulgada de diámetro", mientras que para Borges, "el diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño".

El continuo

Llegamos ahora a un punto en donde es ineludible la pregunta ¿el conjunto de puntos en la recta, es decir, el conjunto de números reales tiene tantos elementos como N?

Veamos, si R tuviera tantos elementos como N, entonces podríamos escribirlos en una lista, en particular los números reales entre el 0 y el 1 en su forma decimal ($x_1 = 0.a_1{}^1a_2{}^1a_3{}^1\ldots$, $x_2 = 0.a_1{}^2a_2{}^2a_3{}^2\ldots$, $x_3 = 0.a_1{}^3a_2{}^3a_3{}^3\ldots$, ..., $x_k = 0.a_1{}^ka_2{}^ka_3{}^k\ldots$,...), en donde cada $a_i{}^j$ es un número entre el 0 y el 9. Ahora tomemos en cuenta el número $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$ en el cual, para cada i, b_i es un número entre el 1 y el 8 diferente de $a_i{}^i$. Resulta entonces que el número x es un número real mayor que 0 y menor que 1 y no aparece en la lista que habíamos dado, ya que difiere de x_i en su i-ésimo decimal para cada i. Por ejemplo, de manera más concreta, supongamos que la lista de los números reales entre el 0 y el 1 es la siguiente:

$x_1 = 0.207445\ldots$, $x_2 = 0.378950\ldots$,
$x_3 = 0.901178\ldots$, $x_4 = 0.983098\ldots$,
$x_5 = 0.872659\ldots$, $x_6 = 0.272457\ldots$

Ahora tomamos $x = 0.123468\ldots$ De esta forma x no es x_1 pues el primer número en la representación decimal de x es 1 y el correspondiente de x_1 es 2; no es x_2 pues el segundo número de la representación decimal de x es 2, mientras que el de x_2 es 7, etcétera. Pero habíamos dicho que en la lista $x_1,x_2,x_3,\ldots$ estaban representados todos los números reales mayores que 0 y menores que 1. Obtenemos así una contradicción. Esto significa que forzosamente R debe tener más elementos que N. Al número de elementos en R lo denotamos por c y recibe el nombre de "El continuo".

Así pues descubrimos otra de las verdades asombrosas sobre el infinito: existe más de un infinito.

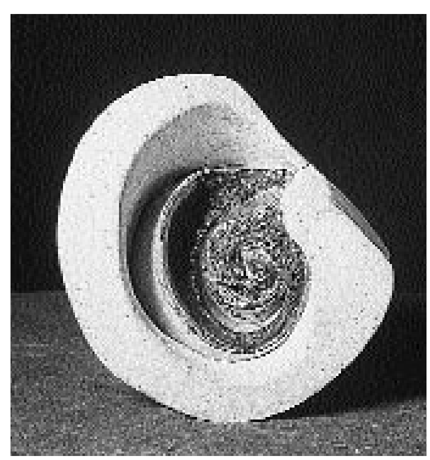
El conjunto potencia

Dado un conjunto A podemos hablar del conjunto potencia $P(A)$ que es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Así, si $A = \{1,2,3\}$, entonces $P(A) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

Obsérvese que en este ejemplo la cantidad de elementos que tiene A es menor estrictamente que la cantidad de elementos que tiene $P(A)$.

La proposición que sigue generaliza esta observación y tiene implicaciones importantes: resultado 1. Para cualquier conjunto A, $P(A)$ tiene estrictamente más elementos que A.

Demostración: supongamos que existe una función biyectiva h que relaciona los elementos de A con aquellos de $P(A)$. Tomamos ahora el conjunto T formado por los elementos x de A que tienen la peculiaridad de no ser elementos de $h(x)$. T es un subconjunto de A y por lo tanto debe existir un elemento a en A tal que $h(a) \in T$. Ahora bien, es claro que el elemento a o pertenece a T o no pertenece a T. Si pasa lo primero, es decir, si $a \in T$, entonces, por definición de los elementos en T, $a \notin T$; y si $a \notin T$, entonces $a \in T$. Las dos conclusiones juntas constituyen una contradicción, por lo cual debemos concluir que no existe ninguna biyección entre los elementos de A y los de $P(A)$. Como además la relación $a \rightarrow \{a\}$ es



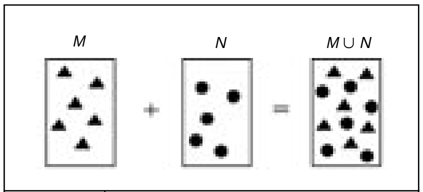


Figura 14

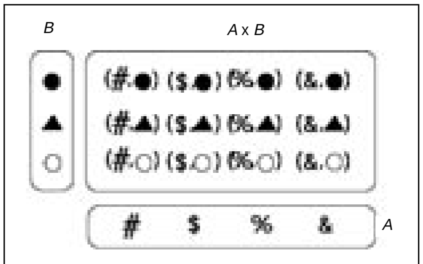


Figura 15

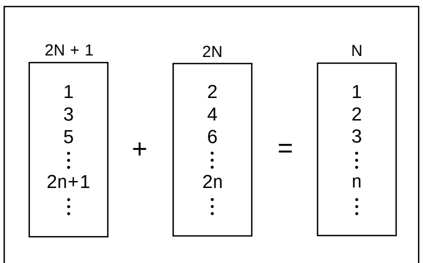


Figura 16

una biyección de A en una subcolección de *P(A)*, entonces se cumple que A tiene estrictamente menos elementos que *P(A)*.

En particular tenemos que: resultado 2. Existe una infinidad de números infinitos diferentes.

Demostración: en efecto, dado cualquier número infinito α y dado un representante de α, A (es decir, la cantidad de objetos que tiene A es α), el número infinito que representa la cantidad de elementos de *P(A)* es un infinito diferente de α y es mayor estrictamente que α.

Podemos nombrar algunos de estos números infinitos: $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 <,\ldots, < \aleph_k <,\ldots$ en donde $\aleph_1$ (álef-uno) es el infinito más pequeño mayor que $\aleph_0$; $\aleph_2$ es el infinito más pequeño mayor que $\aleph_1$; $\aleph_3$ es el infinito más pequeño mayor que $\aleph_2$, y así sucesivamente.

También es posible demostrar que: resultado 3. El conjunto de números reales R tiene la misma cantidad de elementos que *P(N)*.

Por cierto, si la cantidad de elementos de un conjunto infinito A es m, entonces el número de elementos de *P(A)* es igual a 2^m. Por el resultado 3 se cumple que $c = 2^{\aleph_0}$.

Aquí hay que señalar que el número infinito más pequeño es $\aleph_0$, como sugiere la notación. Es decir, si A es un conjunto infinito, entonces A contiene un subconjunto con tantos elementos como N. En efecto, tomemos $a_1 \in A$, como A es infinito existe $a_2 \in A$ el cual es diferente de a_1. De nuevo, como A es infinito, entonces A no es igual a $\{a_1,a_2\}$, por lo que podemos tomar $a_3 \in A$ el cual no pertenece al conjunto $\{a_1,a_2\}$. Así, si ya tomamos $a_1,\ldots,a_k$ elementos diferentes en A, es posible tomar a_{k+1}, también elemento en A que es diferente a los elementos ya tomados $a_1, a_2,\ldots,a_k$. De esta forma se puede construir un subconjunto de A que tiene tantos elementos como N. Esto significa que la cantidad de elementos de A es mayor o igual que la cantidad de elementos de N.

Aritmética de números infinitos

Cuando sumamos al número 3 al número 5, básicamente realizamos la siguiente operación: consideramos un representante del número 3, digamos *{1,2,3}* y tomamos uno del 5 que no tenga elementos comunes con {1,2,3}: {4,5,6,7,8}; reunimos los elementos de ambos conjuntos y obtenemos el conjunto {1,2,3,4,5,6,7,8} que representa al número 8. Así decimos que 3 más 5 es igual a 8.

Esta es la idea natural de suma y la podemos aplicar a nuestros números, sean finitos o infinitos. La suma de dos números, finitos o infinitos, m y n es igual a la cantidad de elementos que posee un conjunto M que representa a m, es decir, que tiene m objetos, más los elementos de un conjunto N que contiene n elementos, cuidando que M y N no tengan elementos comunes (figura 14).

Ahora podemos definir producto, pues éste no es otra cosa que la repetición de la operación suma. Multiplicar los números m y n, $m \cdot n$, es sumar n veces el número m. Es decir, para obtener $m \cdot n$ debemos tomar n conjuntos ajenos por pares, cada uno de ellos con m elementos, y formamos el conjunto unión que contiene a todos los elementos de los conjuntos elegidos. La cantidad de objetos que contiene el nuevo conjunto es igual a $m \cdot n$. Expresado de otra forma, $m \cdot n$ coincide con la cantidad de elementos de un conjunto de la forma $A \times B$ en donde A posee n elementos y B contiene m elementos (figura 15).

Así, de manera natural, hemos definido una aritmética entre los números finitos e infinitos. Sin embargo, cuando operamos con números infinitos debemos tener cuidado, ya que lo inesperado vuelve a aparecer. Algunos de los resultados sorprendentes de esta aritmética de los números infinitos son las igualdades siguientes que no tienen nada que ver con la naturaleza de la aritmética de los números finitos. Se cumple que si m es un número infinito, entonces $m \cdot m = m + m = m$; más generalmente: $m \cdot m = n + m =$ máximo $\{m,n\}$, para cualquier número finito o infinito n.

Esto significa, en particular, que si a un conjunto infinito le aumentamos hasta tantos elementos como los que posee, no aumentamos en nada la magnitud de su tamaño. Por ejemplo, considérese el conjunto de números pares y adiciónese el conjunto de números impares. Estamos sumando $\aleph_0$ más $\aleph_0$. Obtenemos como resultado a todos los números naturales, es decir, volvemos a obtener, como resultado de esta operación, el número $\aleph_0$ (figura 16).

David Hilbert y el problema del continuo

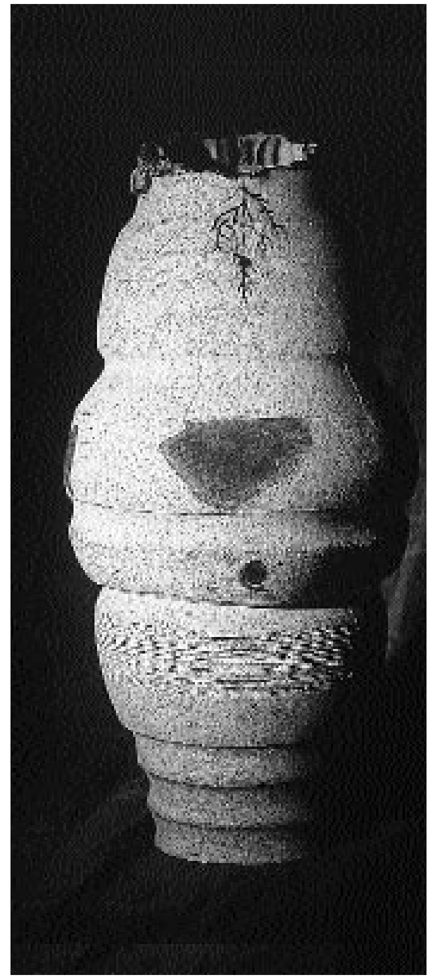
Tenemos entonces que $\aleph_0$ es el número que designa a la cantidad que existe de números naturales, y c designa la cantidad de puntos que hay en una recta. Además, como hemos dicho, $\aleph_0 < c$.

Resulta entonces el siguiente problema que planteó Cantor y que no pudo resolver. ¿Existe un número infinito m que satisfaga la relación $\aleph_0 < m < c$? A la negación de tal afirmación, es decir, $c = \aleph_1$, se le llama ”hipótesis del continuo”.

Ya en 1900 uno de los matemáticos de mayor prestigio de la época, David Hilbert, había planteado varias ideas fundamentales con respecto a las matemáticas y al trabajo de Cantor, algunas de las cuales fueron presentadas por Hilbert en el congreso internacional de matemáticas en París en ese año: 1) manifestó su admiración por el trabajo realizado por Cantor y lo apoyó públicamente contra sus detractores: “nunca nadie nos expulsará del paraíso que Cantor creó para nosotros”; 2) proclamó la cercanía del fin de la construcción del edificio matemático, y no vaciló en afirmar su convicción de que todo problema matemático llegaría a resolverse; 3) enumeró veinte problemas matemáticos que a su juicio eran los problemas más importantes para ser resueltos en los años subsiguientes; entre los que mencionó el del continuo: ¿existe un número infinito m que satisfaga la relación $\aleph_0 < m < c$?

Gödel y Cohen

Treinta años después, Kurt Gödel respondió de manera genial a las preguntas de Hilbert. En primer lugar, no es posible soñar con la estructura completa del edificio matemático, y no es posible obtener una demostración de la veracidad o falsedad de cualquier problema matemático. Demostró que en cualquier teoría axiomática que incluye la aritmética de los números enteros, existe siempre un enunciado tal que ni él ni su negación pueden ser demostrados dentro de la teoría misma; es necesario considerar una teoría más amplia para encontrar su demostración o la demostración de su negación.



Resultado 4 (K. Gödel): si T es un sistema axiomático consistente que incluye la aritmética de los números enteros, entonces hay una fórmula cerrada A en T la cual es indecidible en T.

El segundo resultado de Gödel se refiere al problema del continuo. Demostró que si los axiomas básicos de la teoría de conjuntos llamados de Zermelo-Fraenkel (axiomas tales como: existe un conjunto, el objeto que carece de elementos, es decir, el vacío es un conjunto, la unión de dos conjuntos es un conjunto, existe un conjunto infinito, etcétera) son consistentes, entonces la hipótesis del continuo ($\aleph_1 = c$) es un enunciado consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Es decir, si la teoría construida a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel no contiene ninguna contradicción, entonces la teoría que se obtiene a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más la proposición $c = \aleph_1$, no contendrá ninguna contradicción.

Años más tarde, en 1954, Paul J. Cohen demostró que la negación de la hipótesis del continuo es también consistente con los axiomas de la teoría de conjuntos, suponiendo la consistencia de éstos.

A partir de entonces ha quedado claro que la realidad matemática se bifurca en universos con realidades diferentes cada uno de ellos: el universo del $c = \aleph_1$, por un lado, y el universo del $c > \aleph_1$ en contraposición.

Números infinitos gigantes y pequeños

Los números infinitos forman una parte importante de la materia prima que algunos matemáticos manejan y estudian cotidianamente. Con frecuencia se encuentran con números infinitos gigantescos, los cuales son de diferentes tipos y reciben nombres tales como "infinitos fuertemente inaccesibles", "infinitos medibles", etcétera, y son tan grandes que se puede demostrar que no hay forma de probar su existencia.

Por ejemplo, un infinito fuertemente inaccesible α tiene las siguientes características: 1) para obtener α sumando infinitos menores que él, debemos, forzosamente, utilizar α sumandos, y 2) para cualquier infinito $\beta < \alpha$ se cumple que $2^{\beta} < \alpha$...

Están también los infinitos que podemos llamar pequeños, que son los números que se encuentran entre $\aleph_0$ y c.

Para ilustrar este tipo de infinitos necesitamos introducir algunas definiciones.

Al conjunto P de todas las funciones definidas en N y con valores en N le asignamos un orden $\leq$ como sigue: para $f,g \in P$, $f \leq g$ si $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \in N$. Un subconjunto B es no acotado si no existe ningún $h \in P$ tal que $g \leq h$ para cualquier $g \in B$; y decimos que B es dominante si para cada $f \in P$ existe $g \in B$ tal que $f \leq g$.

Definimos ahora b como el infinito que representa la cantidad que tiene uno de los subconjuntos más pequeños de P que no son acotados, y d es el infinito que representa la cantidad de elementos que tiene uno de los conjuntos dominantes más pequeño en P.

Se puede demostrar que $\aleph_1 \leq b \leq d \leq c$.

Es decir, b y d son infinitos pequeños. Además, es consistente con los axiomas de Zermelo Fraenkel que $b < d$, y es también consistente que $b = d$. Es decir, lo real acerca de b y d depende del universo matemático sobre el que estemos observando.

Termino esta breve descripción de lo infinitamente grande, reproduciendo unas palabras de principios del siglo XX del filósofo ingles Bertrand Russell, quien al referirse a los logros de las matemáticas del siglo XIX, y en especial a los de Cantor, al resolver el problema de lo infinitamente grande, escribe "casi toda la filosofía anda hoy transtornada por el hecho de que todas las viejas y respetables contradicciones en las nociones del infinito han sido eliminadas para siempre". Nos preguntamos qué tan válida sigue siendo hoy en día esta frase; en particular: ¿cuál es la posición de la filosofía de principios del siglo XXI con respecto al infinito y con respecto a los grandes logros de las matemáticas del siglo XX?

Ángel Tamariz Mascarúa
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.

Referencias Bibliográficas

Amor Montaño, J. A. 1997. *Teoría de Conjuntos*, en Las prensas de ciencias.

———. 2000. "La teoría de conjuntos en el siglo XX", en *Miscelánea Matemática*, núm. 31.

Bell, E.T. 1965. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster.

Borges, J. L. *El Aleph*. Emecé, 1998.

Bourbaki, N.1974. *Élements d'Histoire des Mathematiques*, Hermann, Paris.

Cassirer, E. *Kant, vida y doctrina*. Fondo de Cultura Económica, México, 1968.

Van Douwen, E.K.1984. "The Integers and Topology", en *Handbook of Set Theoretic Topology*, Ch. 12, eds. K. Kunen y J.E. Vaughan, North Holland, Amsterdam. pp.11-167.

Time-Life Books.1988. *Galaxies*. Time-Life, Alexandria, Virginia.

Goro F. *et al*. 1993. *On the Nature of Things: The Scientific Photography of Fritz Goro*.

Hernández Hernández, F. 1998. *Teoría de Conjuntos*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana.

Houzel, C. *et al*. 1976. *Philosophie et calcul de l'infini*, Francois Maspero, París.

Hrbacek, K., y T., Jech. 1999. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc., Nueva York - Basel.

Juhász, I. 1983. *Cardinal Functions in Topology, Ten Years Later*. Mathematical Center Tracts 123, Math. Centrum, Amsterdam.

Kamke, E. 1950. *Theory of Sets*. Dover Publications, Inc.

Lemonick, M. D. 1995. "Cosmic close-ups", en *Time*, November 20.

Lionnais F. *et al.* 1976. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Readings from Scientific American. *1968. Mathematics in the modern world* (with an introduction by M. Kline), W. H. Freeman and Company, San Francisco.

Neruda, P. *Cien sonetos de amor*. Editorial Andrés Bello, 1999.

Nilsson, L. *et al*. 1986. *La victoria del cuerpo humano.* Ediciones Folio, México.

Russell, B.1969. *Los metafísicos y las matemáticas*. Ed. J.R. Newman, Sigma, Grijalbo.

Ruisánchez, J. M. 2001. *Contar hasta el infinito*. Tesis de licenciatura, UNAM.

Steward, I. 1975. *Conceptos de matemática moderna*. Alianza Universidad, Madrid.

Tamariz Mascarúa., A. 1989. "Espacios de ultrafiltros I", en *Aportaciones matemáticas*. SMM. Comunicaciones 8. pp. 145-187.

Imágenes

Claudia Cancino, cerámica de alta temperatura, óxido y engobes, 2001-2002. pp. 66 y 73: *De la serie Fósiles*. pp. 69, 70, 75, 76 y 77: *Sin título.*